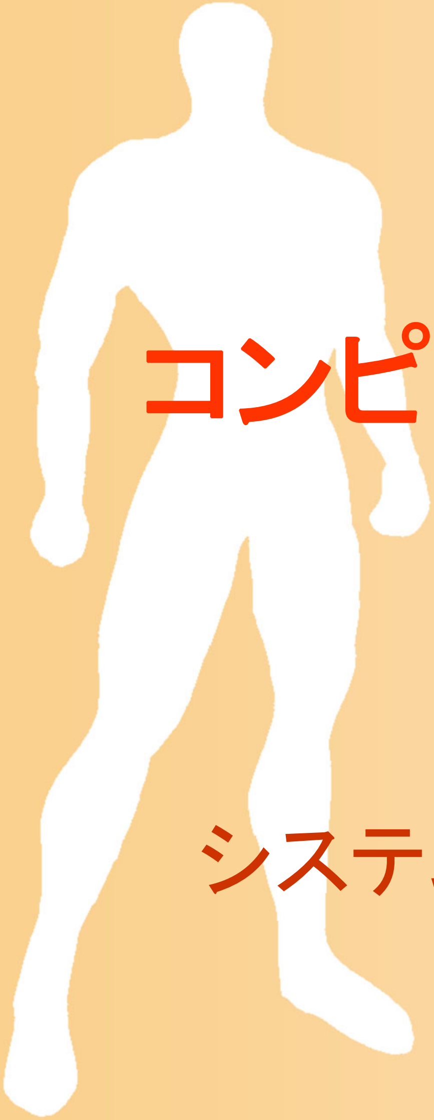


コンピューターグラフィックスS

第9回　座標変換(2)

システム創成情報工学科　尾下 真樹

2019年度 Q2

今日の内容

- 前回の復習
- 変換行列の復習・応用
  - 前回の演習問題（宿題）
  - 追加の演習問題
- OpenGLプログラミング
  - 変換行列の設定

前回の復習

変換行列による座標変換の実現

- 視野変換＋射影変換
  - アフィン変換（視野変換）＋透視変換（射影変換）
  - 最終的なスクリーン座標は $(x'/w' \quad y/w' \quad z/w')$ となる

モデル座標系での頂点座標

$$
\begin{pmatrix}
\frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\
0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\
0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\
0 & 0 & -1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
R_{00}S_x & R_{01} & R_{02} & T_x \\
R_{10} & R_{11}S_y & R_{12} & T_y \\
R_{20} & R_{21} & R_{22}S_z & T_z \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}
$$

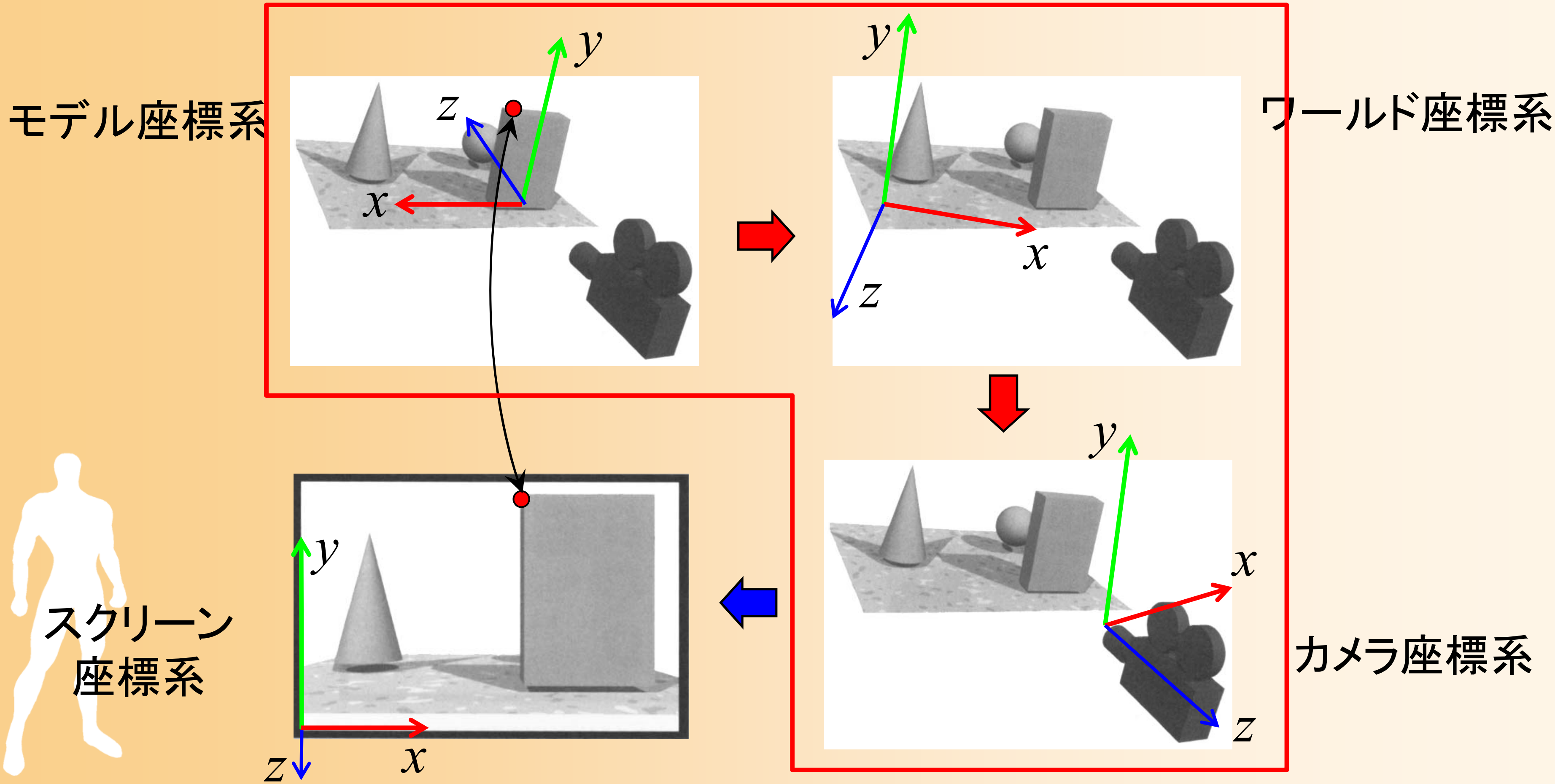
射影変換
（カメラ→スクリーン）

視野変換
（モデル→カメラ）

スクリーン座標系
での頂点座標

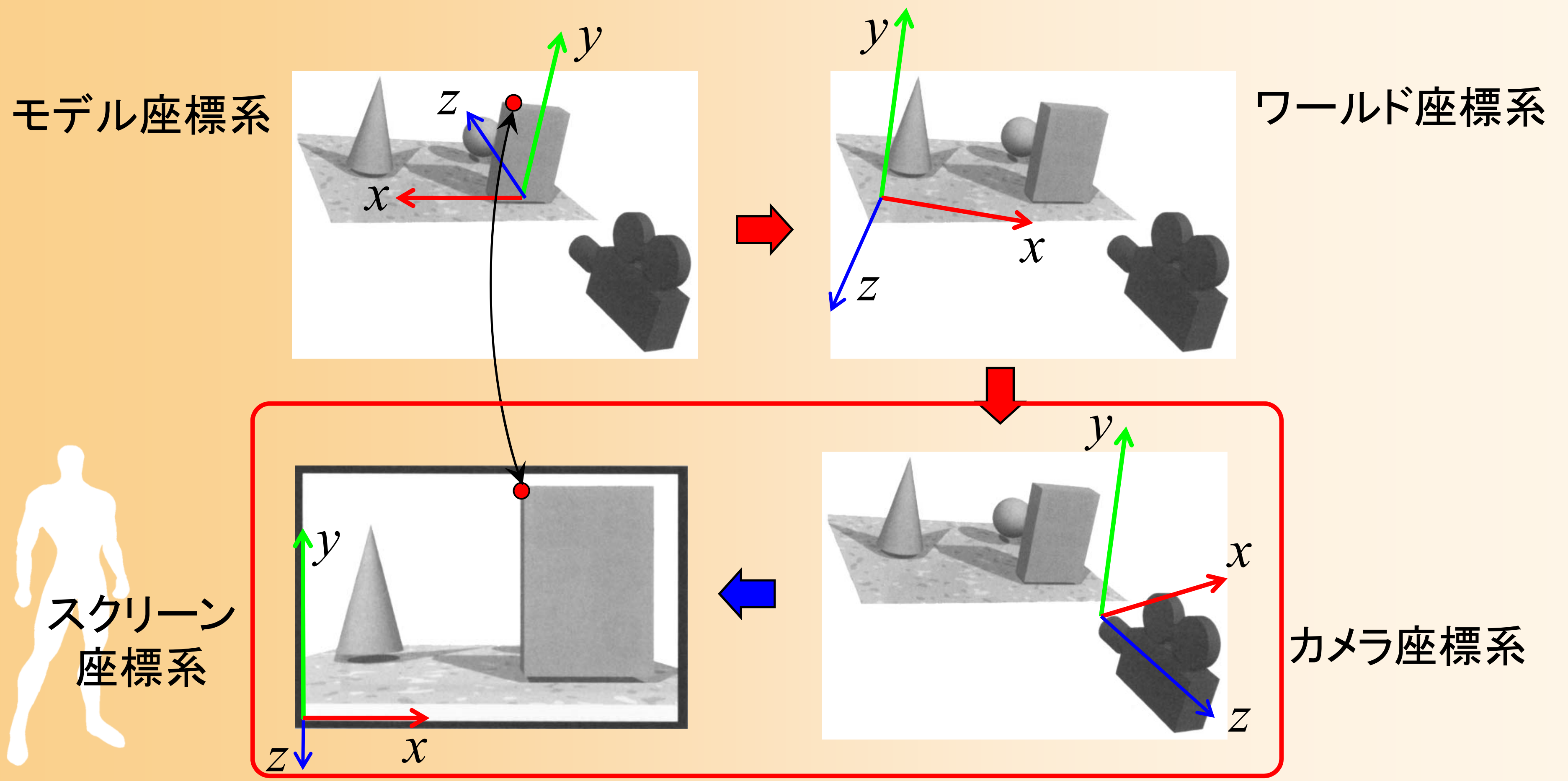
視野変換

- モデル座標系からカメラ座標系に変換



射影変換

- カメラ座標系からスクリーン座標系に変換



同次座標変換

- 同次座標変換
  - ４×４行列の演算により、３次元空間における平行移動・回転・拡大縮小（アフィン変換）などの操作を統一的に実現
    - （x, y, z, w）の４次元座標値（同次座標）を扱う
    - ３次元座標値は（x/w, y/w, z/w）で計算（通常は w = 1）

$$\begin{pmatrix} R_{00}S_x & R_{01} & R_{02} & T_x \\ R_{10} & R_{11}S_y & R_{12} & T_y \\ R_{20} & R_{21} & R_{22}S_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}$$

平行移動

- 平行移動
  - (Tx, Ty, Tz) の平行移動
    - 4×4行列を用いることで、平行移動を適用することができる

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ z + T_z \\ 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}
$$

回転

- 回転
  - 原点を中心とする回転を表す

$$\begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & 0 \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & 0 \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{00}x + R_{01}y + R_{02}z \\ R_{10}x + R_{11}y + R_{12}z \\ R_{20}x + R_{21}y + R_{22}z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

回転変換の行列

- 回転変換の行列の導出方法
  - 各軸を中心として右ねじの方向の回転（軸の元から見て反時計回り方向の回転）を通常使用
  - yz平面、xz平面、 xy平面での回転を考えれば、２次元平面での回転変換と同様に求められる
    - ２次元平面での回転行列は、高校の数学の内容

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X軸を中心とする回転変換

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

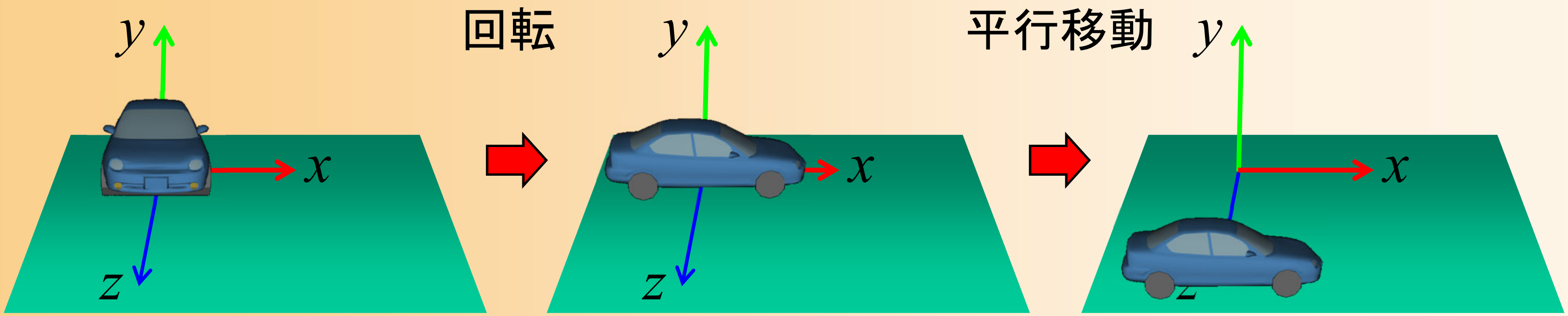
Y軸を中心とする回転変換

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Z軸を中心とする回転変換

複数の変換行列の適用例

- 回転・移動の組み合わせの例



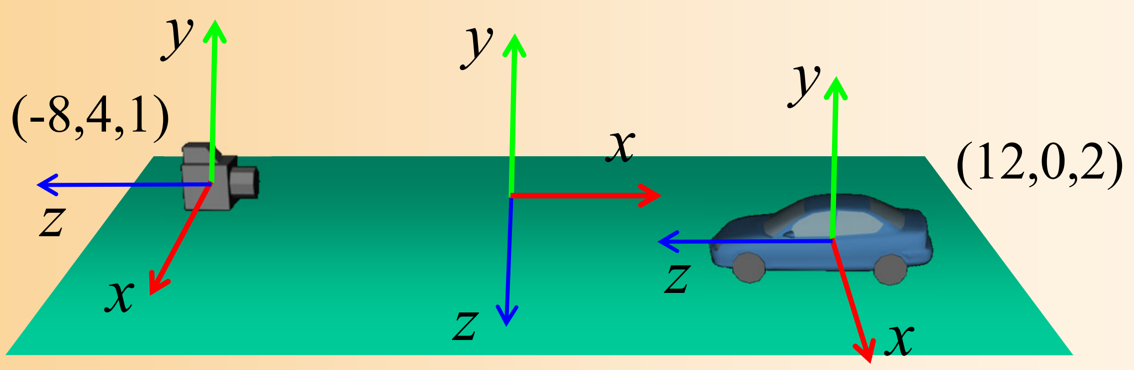
平行移動　　　　　　　回転

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

先に適用する方が右側になることに注意！

演習問題1

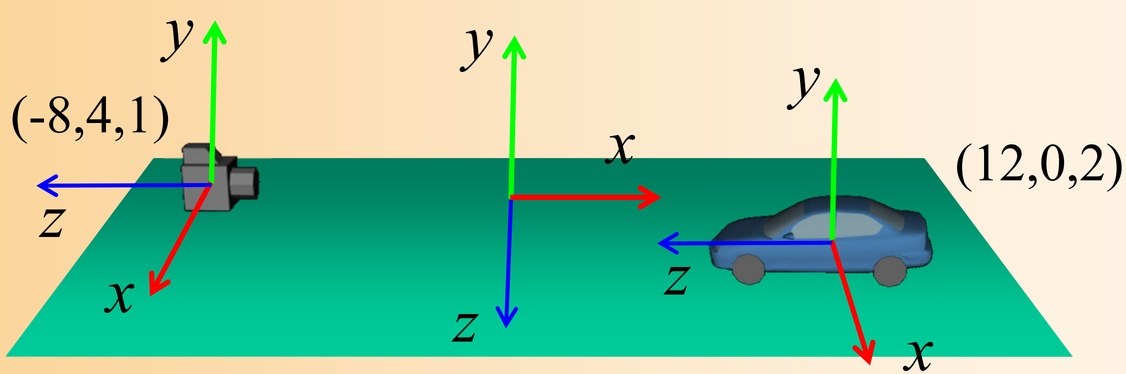
- 下記のシーンにおける、モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求めよ
  - ワールド座標系に対して、モデルが（12,0,2）の位置にあり、Y軸を中心に -90度 回転している
  - ワールド座標系に対して、カメラが（-8,4,1）の位置にあり、Y軸を中心に -90度 回転している



解答

- モデル座標系→カメラ座標系への変換

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{ワールド座標系→カメラ座標系}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{モデル座標系→ワールド座標系}}
$$



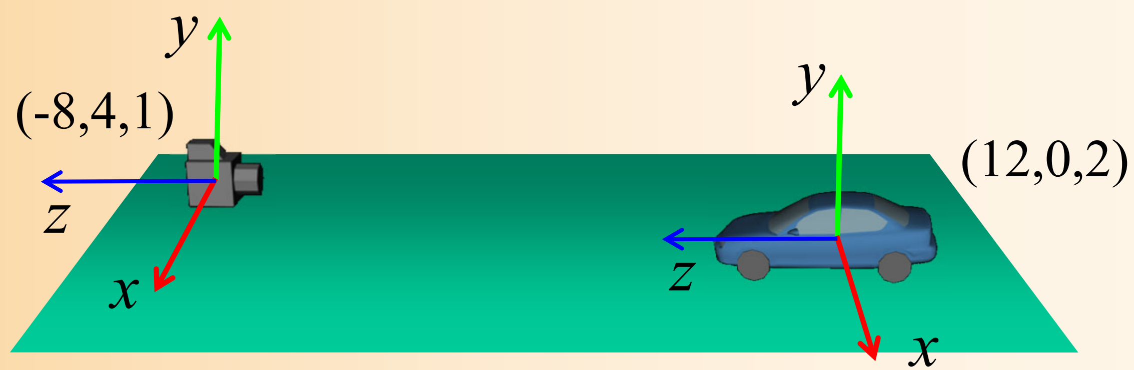
解答(検算)

- 検算
  - 行列を実際に計算してみる

$$
\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

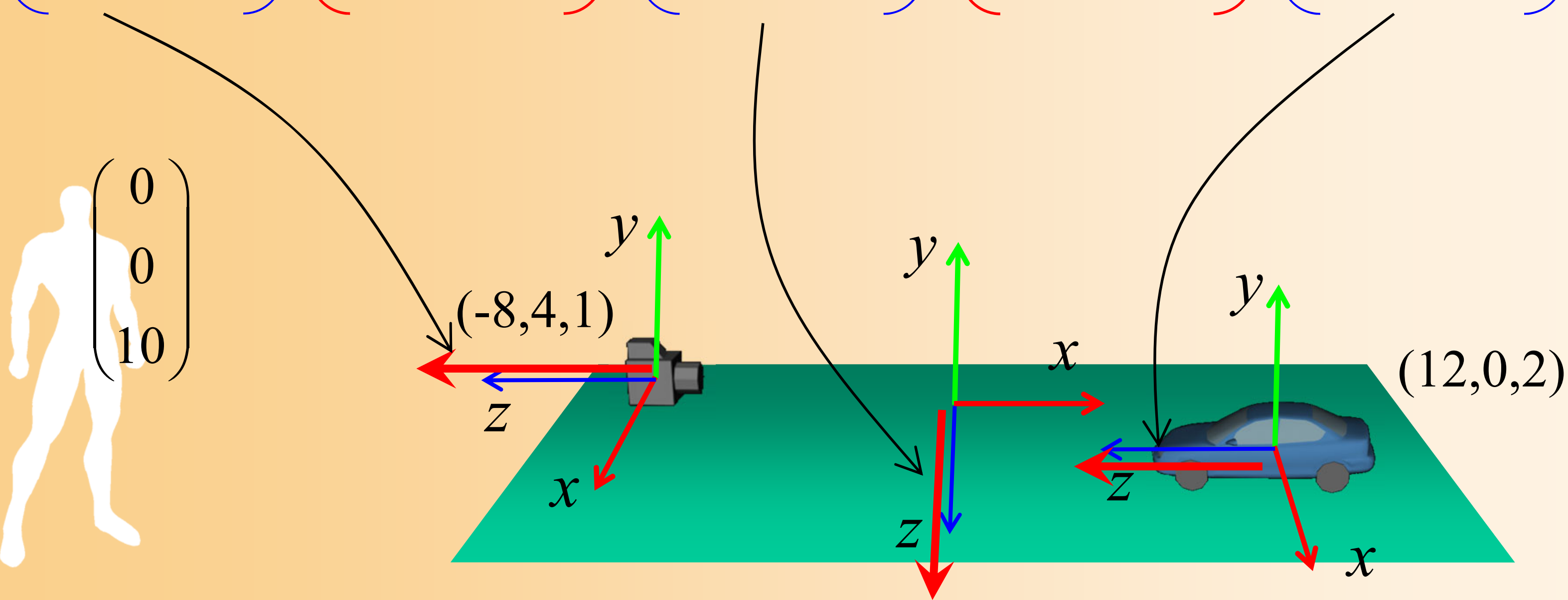
この場合、モデル座標系とカメラ座標系の向きが同じなので、結果的に単なる平行移動になっていることに注目



平行移動の適用位置（復習）

- 平行移動を適用する順番により、結果は変る

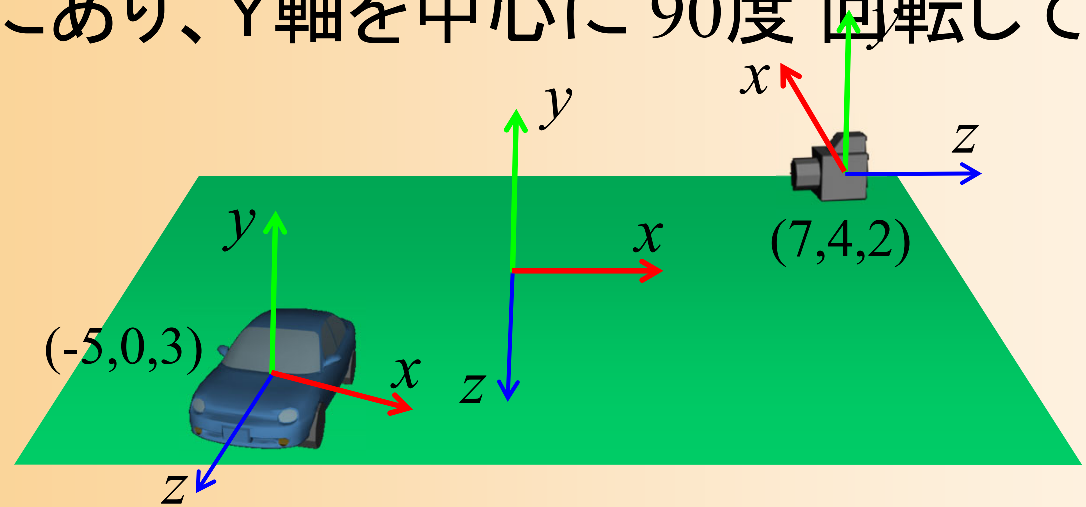
$$\left(\begin{array}{l}\text{カメラ}\\\text{座標での}\\\text{平行移動}\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}\text{ワールド}\\\rightarrow\text{カメラ}\\\text{の回転}\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}\text{ワールド}\\\text{座標での}\\\text{平行移動}\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}\text{モデル}\rightarrow\\\text{ワールド}\\\text{の回転}\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}\text{モデル}\\\text{座標での}\\\text{平行移動}\end{array}\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{pmatrix}$$



前回の演習問題（宿題）

演習問題

- 下記のシーンにおける、モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求めよ
  - ワールド座標系に対して、モデルが（-5,0,3）の位置にあり、Y軸を中心に -30度 回転している
  - ワールド座標系に対して、カメラが（7,4,2）の位置にあり、Y軸を中心に 90度 回転している



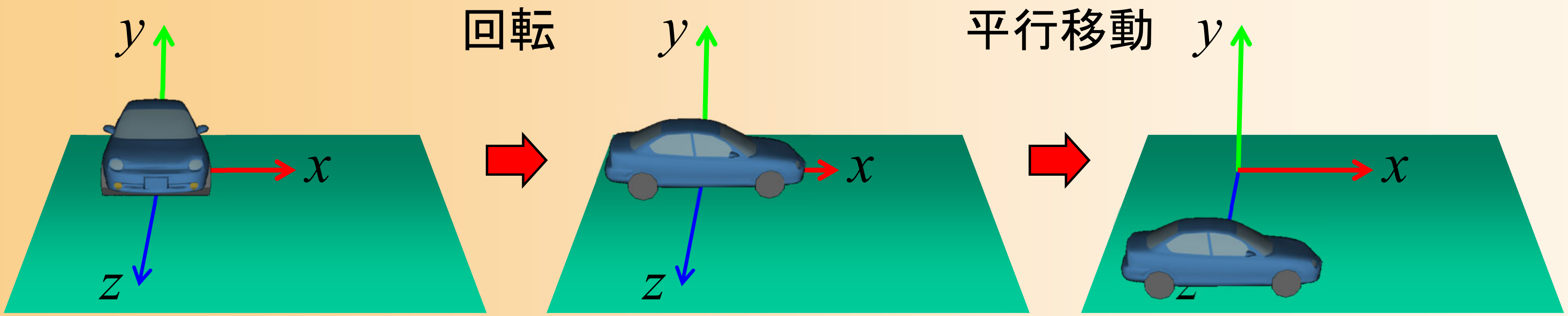
演習問題

1. 変換行列を求める
   - モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求める
   - 行列の積の形で表現
2. 検算
   - 変換行列（行列の積）を計算
   - いくつかの座標に適用してみて、結果を確認
   - (0, 0, 0) に座標変換を適用
   - (0, 0, 1) に座標変換を適用

変換行列の復習・応用

行列演算の適用（復習）

- 回転・移動の組み合わせの例



平行移動　　　　回転

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \sin 90^\circ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

先に適用する方が右側になることに注意！

行列計算の適用順序（復習）

- 行列演算では可換則は成り立たないことに注意！

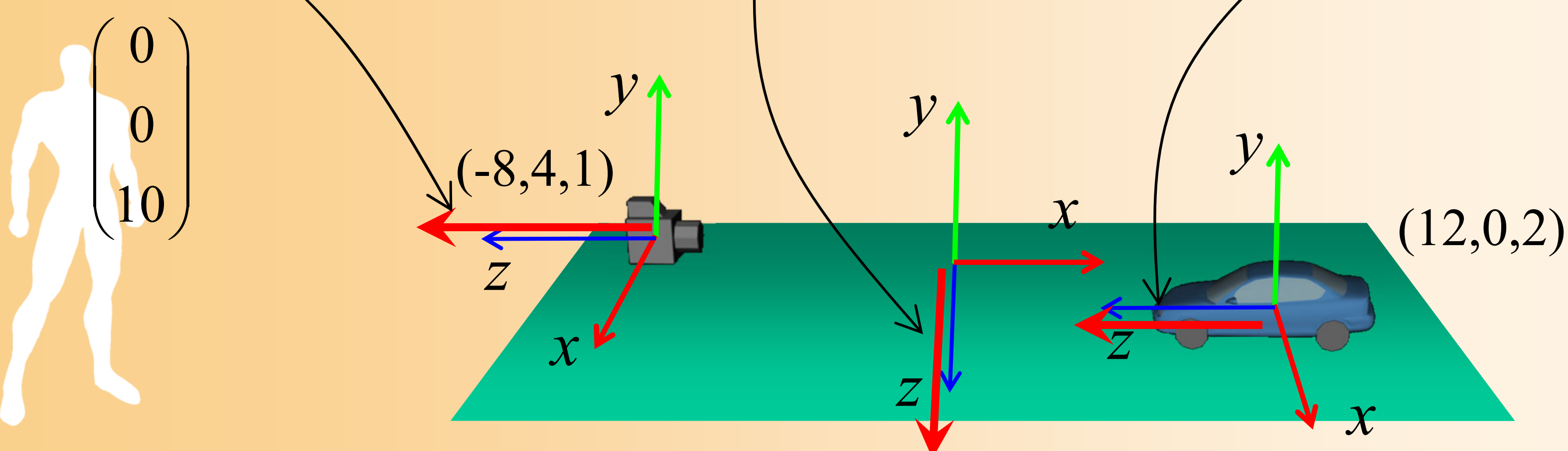
  $$AB \neq BA$$

- 行列の適用順序によって結果が異なる
  - 例:
    - 回転 $\rightarrow$ 平行移動
    - 平行移動 $\rightarrow$ 回転

平行移動の適用位置

- 平行移動を適用する順番により、結果は変る
  - カメラ座標系での移動、モデル座標系での移動

(カメラ座標での平行移動)(ワールド→カメラの回転)(ワールド座標での平行移動)(モデル→ワールドの回転)(モデル座標での平行移動) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{pmatrix}$



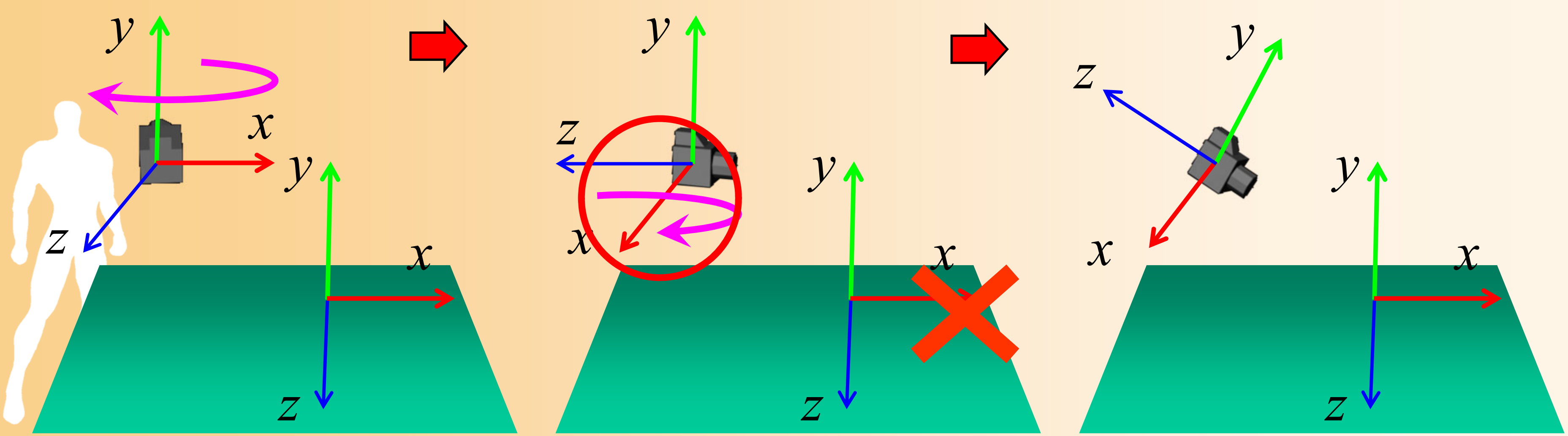
複数の回転をかけるときの注意

- 2回目以降の回転は、各回転は、前の回転がかかった後の座標系で適用されることに注意

複数の回転をかける例(1)

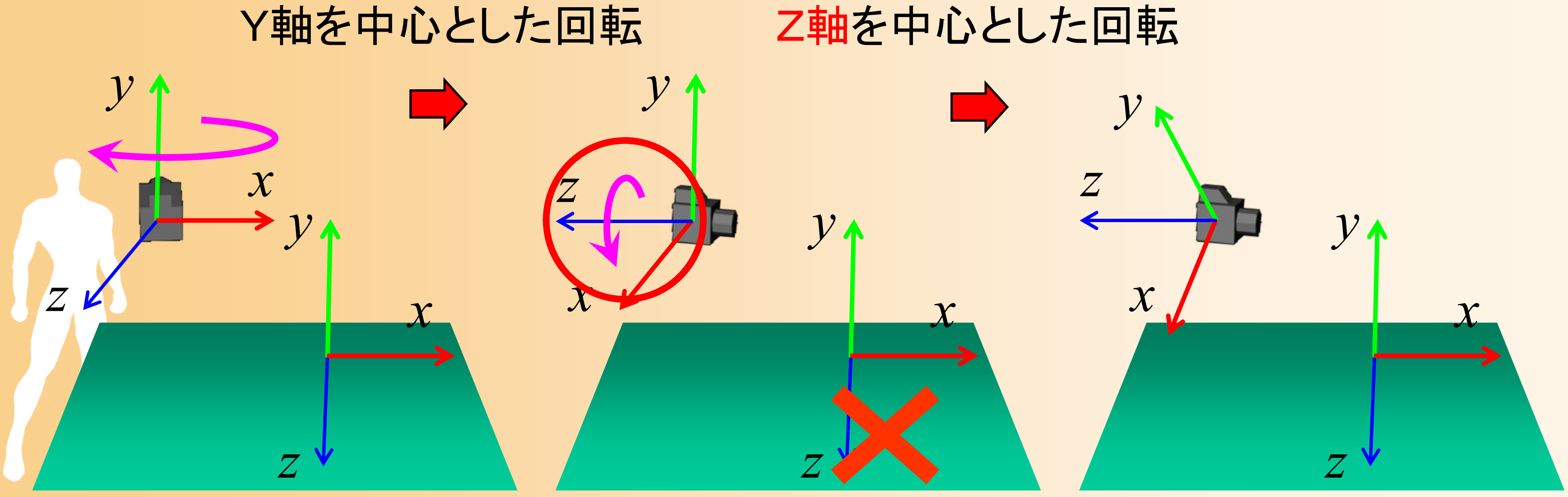
- Y軸周りの回転 → X軸周りの回転
  - 2回目のX軸周りの回転は、ワールド座標系のX軸ではなく、最初の回転を適用したあとのカメラ座標系のX軸周りの回転となる

Y軸を中心とした回転　　X軸を中心とした回転



複数の回転をかける例(2)

- Y軸周りの回転 → Z軸周りの回転
  - 同じく、2回目のZ軸周りの回転は、ワールド座標系のZ軸ではなく、最初の回転を適用したあとのカメラ座標系のZ軸周りの回転となる



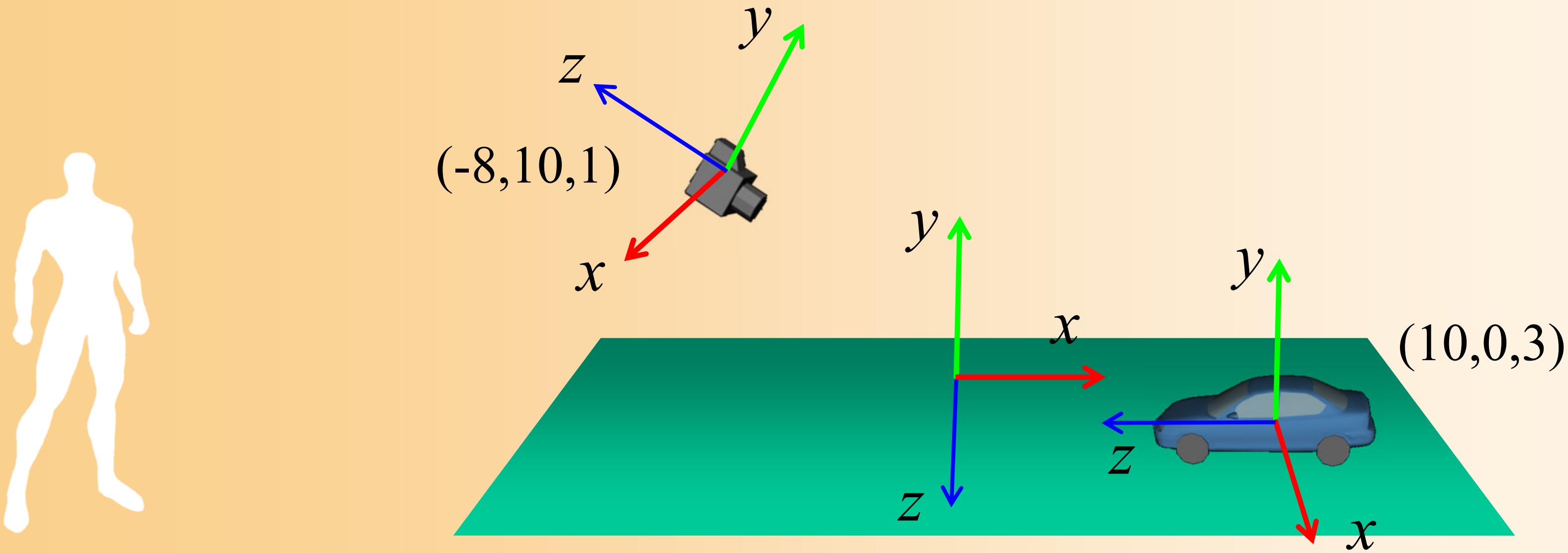
複数の回転をかけるときの注意

- 最終的に決めたい向きに応じて、どのような順番・角度で変換行列を適用するのが適切かを考えて、決める必要がある

追加の演習問題

演習問題

- 下記のシーンにおける、モデル座標系からカメラ座標系への変換行列を求めよ
  – 物体の位置が(10,0,3)にあり、Y軸を中心として -90度回転している
  – カメラの位置が(-8,10,1)にあり、Y軸を中心として -90度、Z軸を中心として-45度 回転している



解答

- 解答

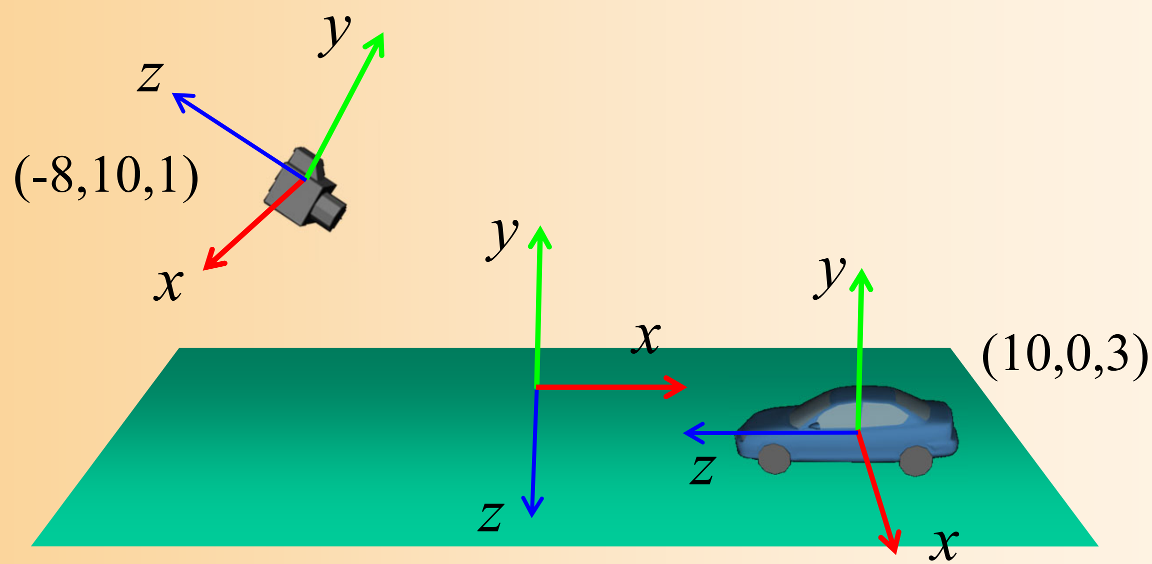
X軸周りの回転　Y軸周りの回転

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(45^\circ\right) & -\sin\left(45^\circ\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(45^\circ\right) & \cos\left(45^\circ\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos\left(90^\circ\right) & 0 & \sin\left(90^\circ\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\left(90^\circ\right) & 0 & \cos\left(90^\circ\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{ワールド座標系→カメラ座標系}}
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos\left(-90^\circ\right) & 0 & \sin\left(-90^\circ\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\left(-90^\circ\right) & 0 & \cos\left(-90^\circ\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{モデル座標系→ワールド座標系}}
$$

解答

- モデル座標系→ワールド座標系

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(-90^\circ\right) & 0 & \sin\left(-90^\circ\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\left(-90^\circ\right) & 0 & \cos\left(-90^\circ\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



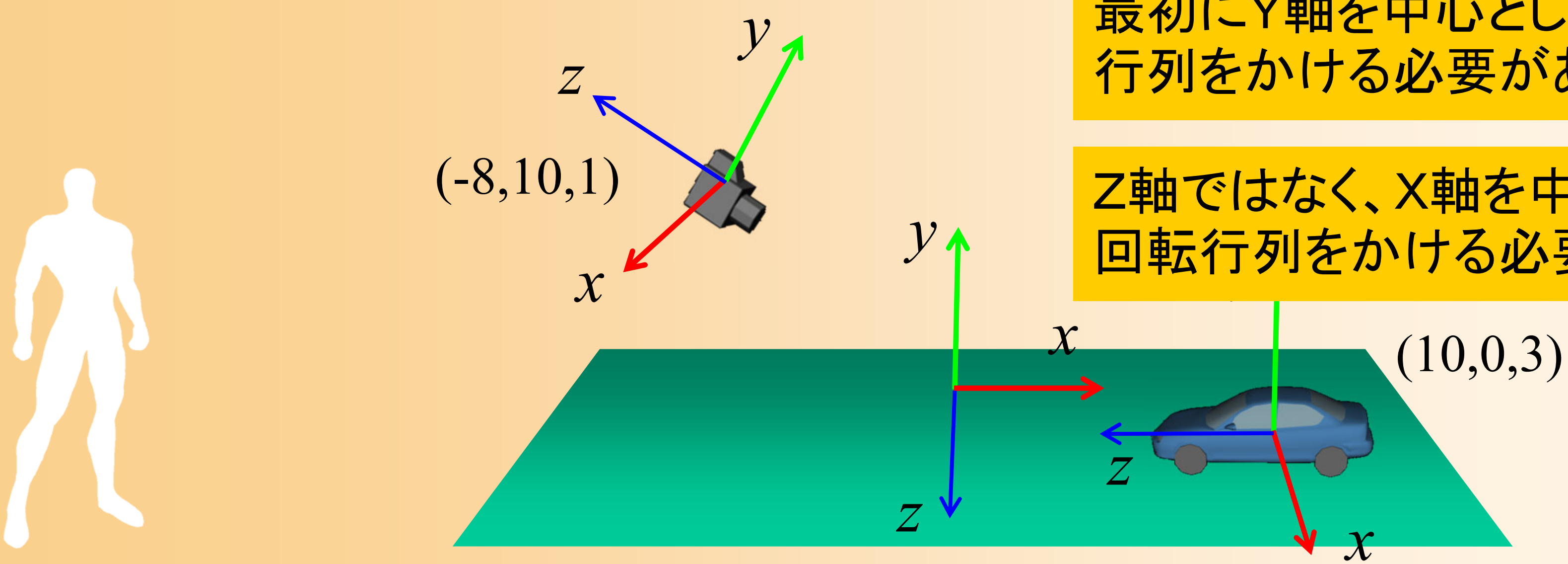
解答

- ワールド座標系→カメラ座標系

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

最初にY軸を中心とした回転行列をかける必要がある

Z軸ではなく、X軸を中心とした回転行列をかける必要がある

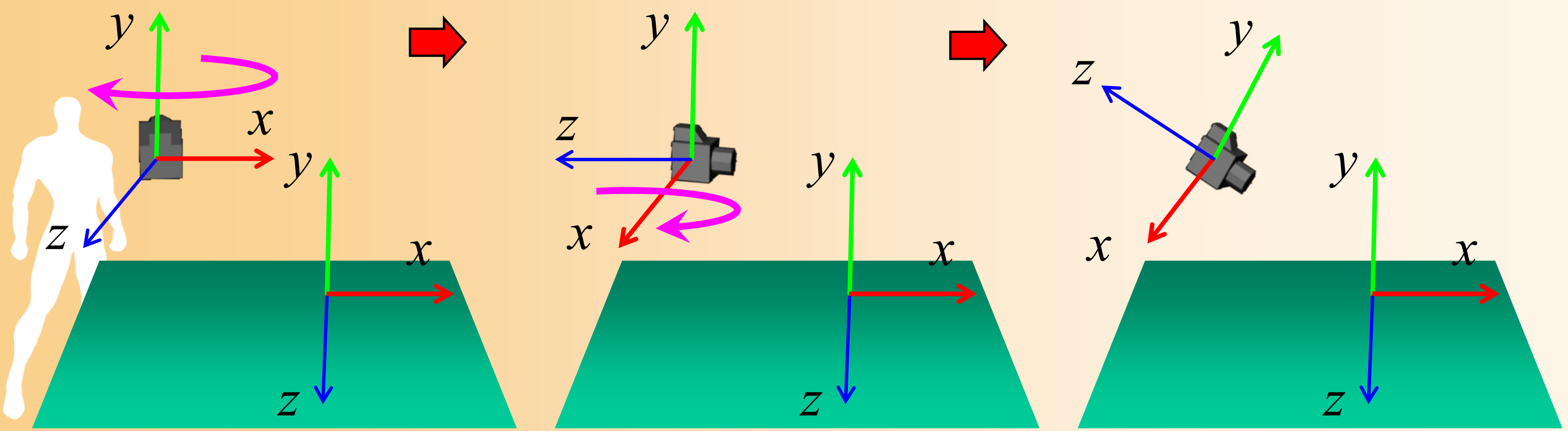


解答

- ２つの回転行列の適用

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

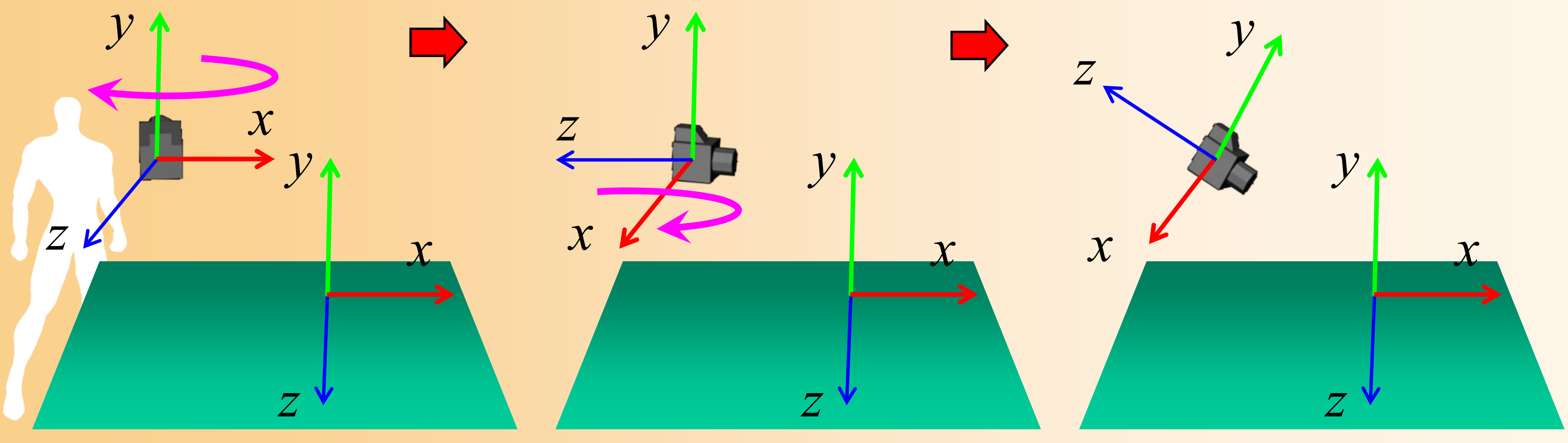
Y軸を中心とした回転　　　X軸を中心とした回転



解答

- 注意点
  - ２番目の回転では、ワールド座標系でみると Z軸を中心に回転しているが、カメラ座標系では X軸を中心に回転している

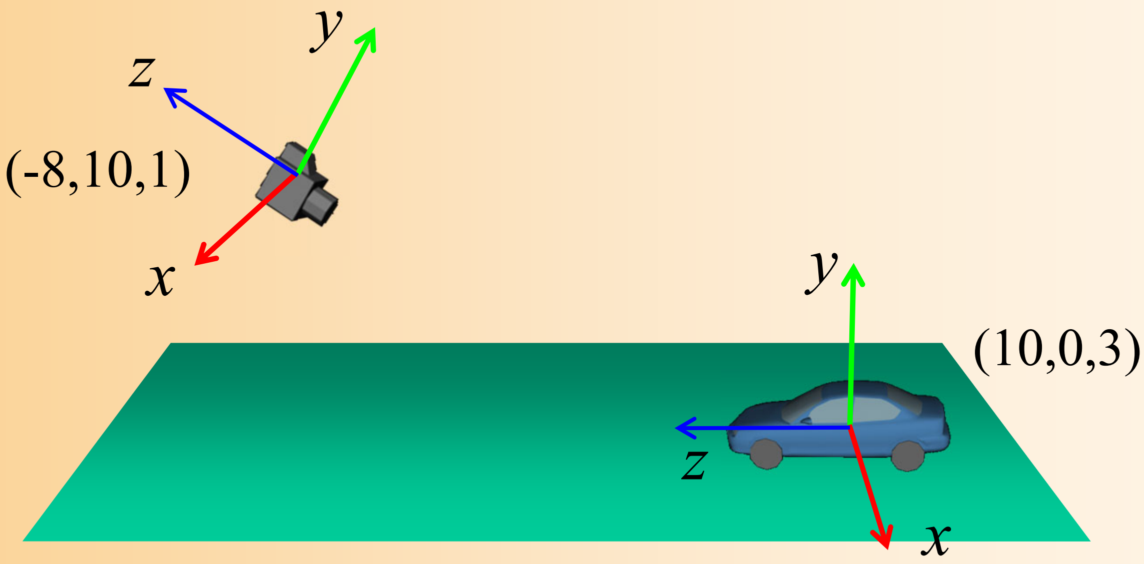
Y軸を中心とした回転　　X軸を中心とした回転



解答

- 図から分かるように、回転についてはカメラ座標系のX軸を中心に -45度 回転するのと同じ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



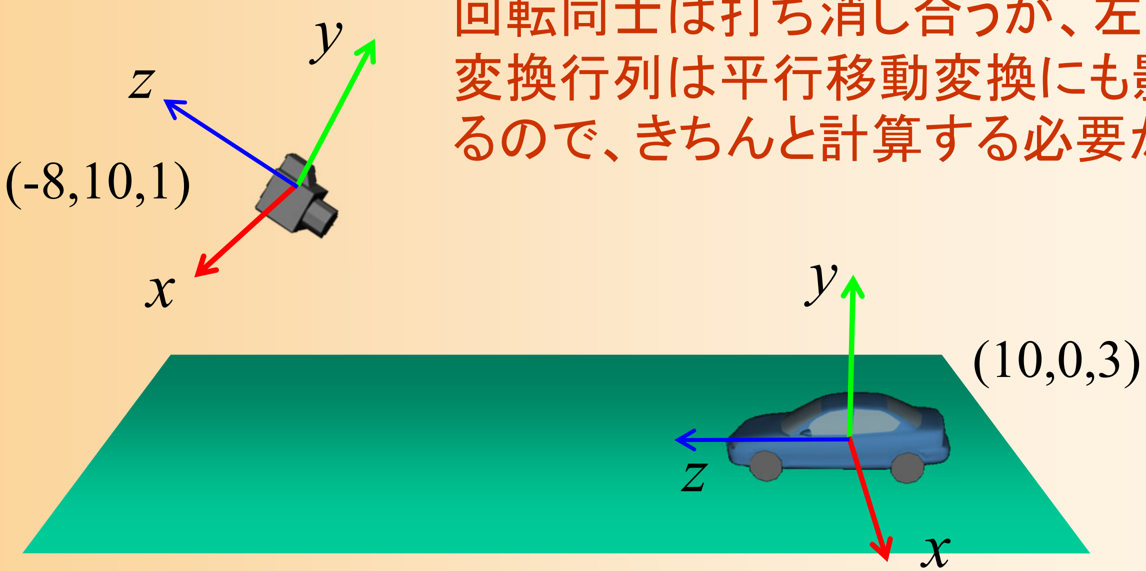
解答

- 最初と2回目の回転は打ち消しあう点に注目

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系　　　モデル座標系→ワールド座標系

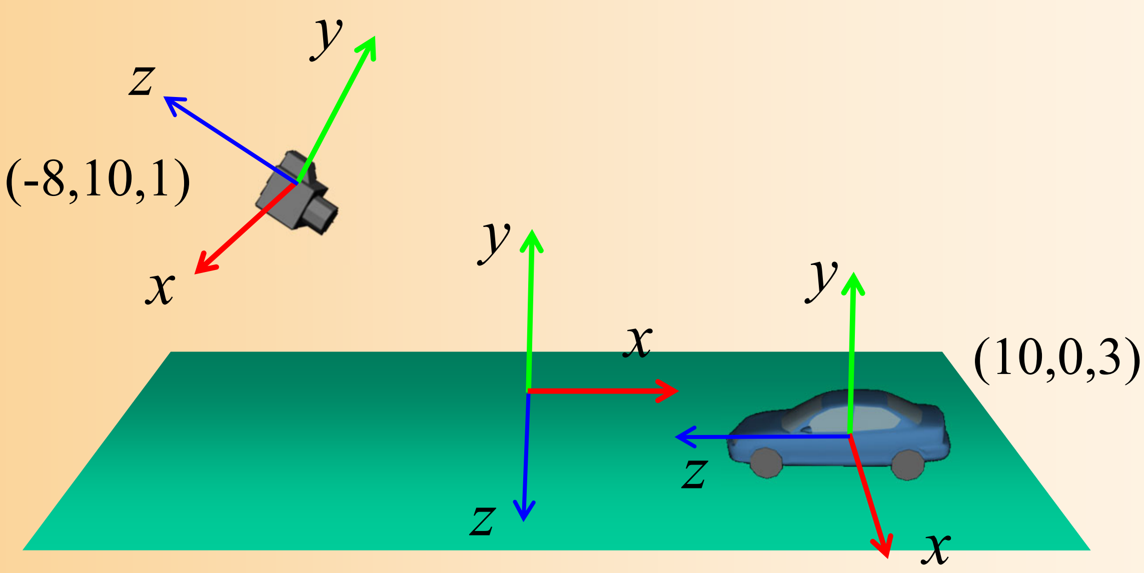
回転同士は打ち消し合うが、左側の回転変換行列は平行移動変換にも影響を与えるので、きちんと計算する必要がある



検算

- 前の問題と同様の検算を行う
  - （各自でやっておくこと）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0.7 & -0.7 & 5.6 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & -19.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



解答（誤答）

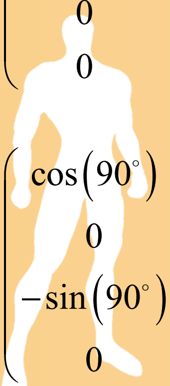
- 間違いの多い例

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos(45^\circ)&-\sin(45^\circ)&0\\0&\sin(45^\circ)&\cos(45^\circ)&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(90^\circ)&0&\sin(90^\circ)&0\\0&1&0&0\\-\sin(90^\circ)&0&\cos(90^\circ)&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&8\\0&1&0&-10\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&10\\0&1&0&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-90^\circ)&0&\sin(-90^\circ)&0\\0&1&0&0\\-\sin(-90^\circ)&0&\cos(-90^\circ)&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}\cos(45^\circ)&-\sin(45^\circ)&0&0\\\sin(45^\circ)&\cos(45^\circ)&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(90^\circ)&0&\sin(90^\circ)&0\\0&1&0&0\\-\sin(90^\circ)&0&\cos(90^\circ)&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdots$$

Z軸ではなく、X軸を中心とした回転行列をかける必要がある



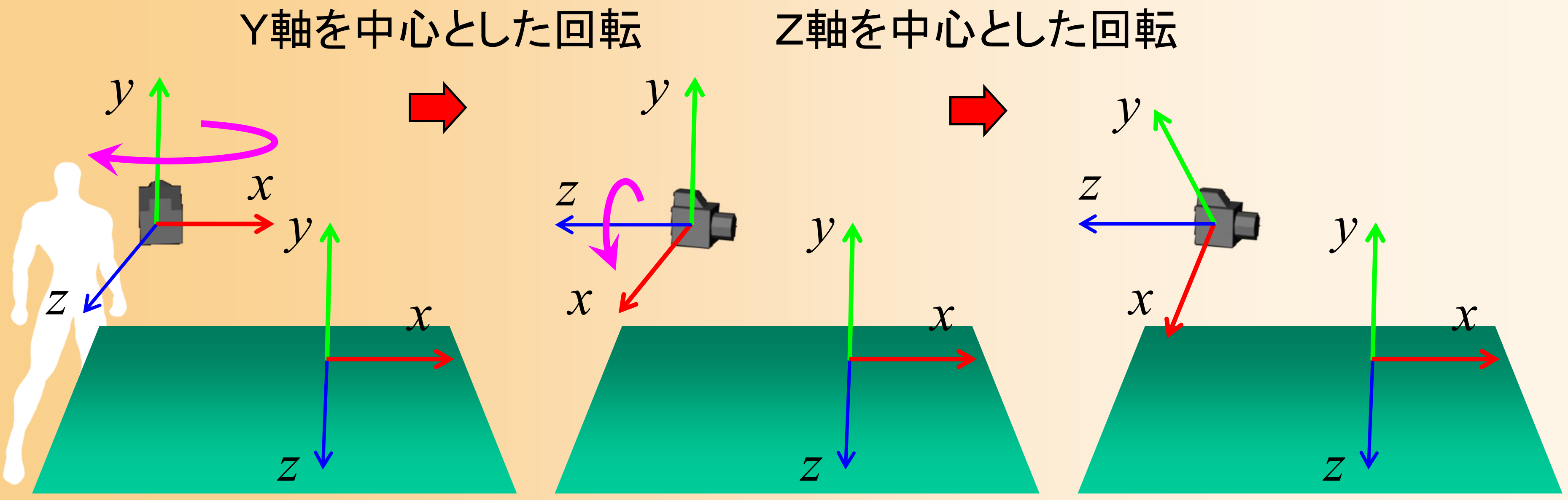
$$\begin{pmatrix}\cos(90^\circ)&0&\sin(90^\circ)&0\\0&1&0&0\\-\sin(90^\circ)&0&\cos(90^\circ)&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(45^\circ)&-\sin(45^\circ)&0&0\\\sin(45^\circ)&\cos(45^\circ)&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdots$$

最初にY軸を中心とした回転行列をかける必要がある

解答（誤答1）

$$\begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系のZ軸を中心として回転するつもりが、
カメラ座標系のZ軸を中心とした回転が適用されてしまう

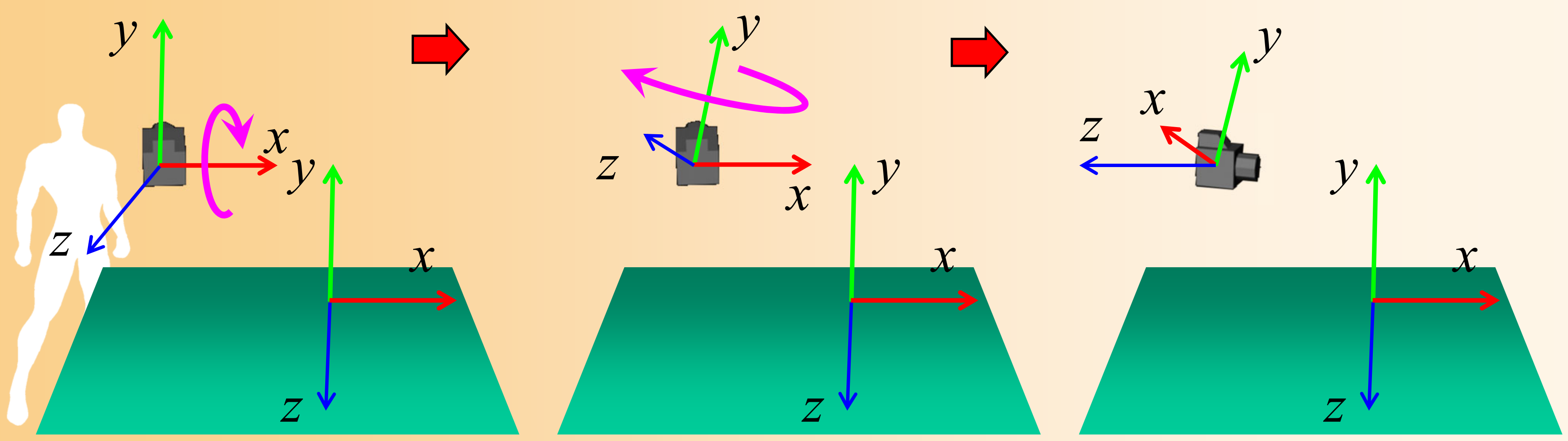


解答（誤答2）

$$\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ワールド座標系のY軸を中心として回転するつもりが、
カメラ座標系のY軸を中心とした回転が適用されてしまう

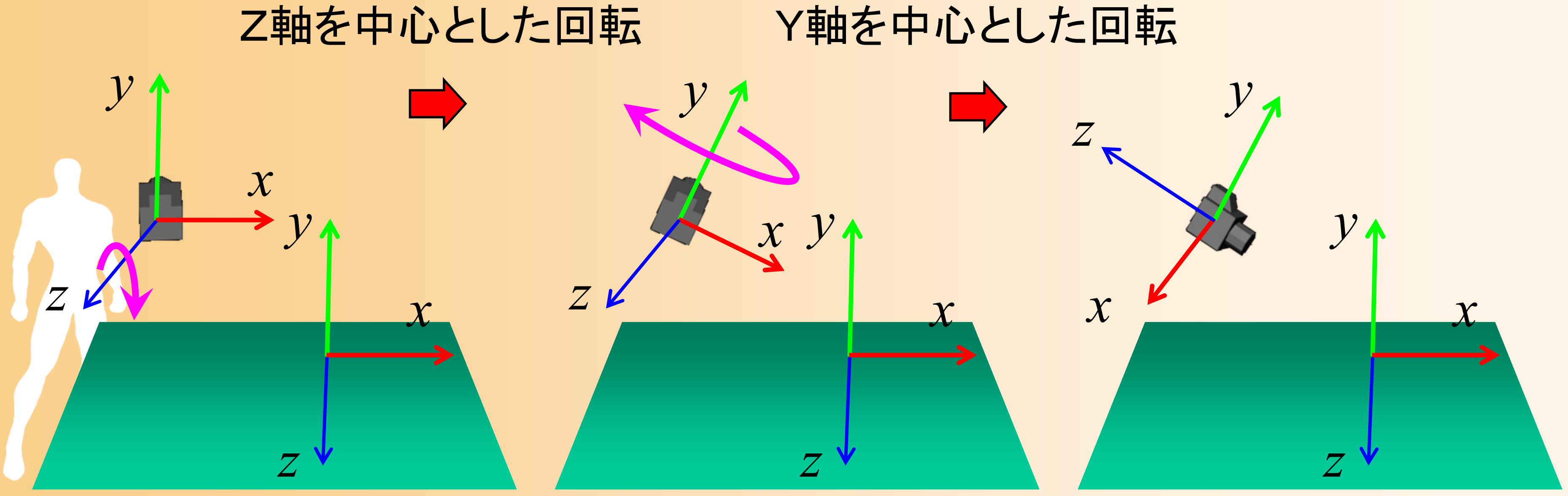
X軸を中心とした回転　　Y軸を中心とした回転



解答（誤答3）

$$\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

２回目の回転は、ワールド座標系ではなくローカル座標系のY軸を中心とした回転になるが、この場合、１回目の回転でちょうど傾きの方向が９０度ずれているので（カメラがX軸ではなくZ軸を中心に回転しているので）、結果はたまたま合う



解答(誤答3)

- 解答

今回はどちらも同じ結果になる
(こちらの方が意味的には正しい)

X軸周りの回転　　Y軸周りの回転

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

ワールド座標系→カメラ座標系　　モデル座標系→ワールド座標系

- 誤答(たまたま同じ計算結果になるが間違い)

Y軸周りの回転　　Z軸周りの回転

$$
\begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & 0 & \sin(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & 0 & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

ワールド座標系→カメラ座標系　　モデル座標系→ワールド座標系

別解

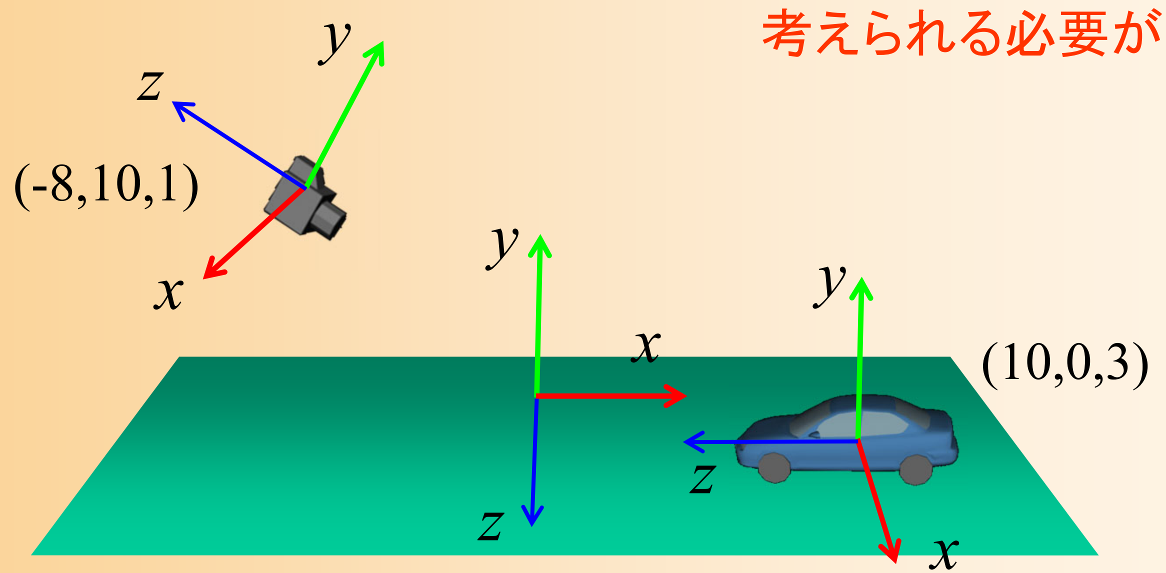
$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&-8\\0&1&0&10\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\left(-90^\circ\right)&0&\sin\left(-90^\circ\right)&0\\0&1&0&0\\-\sin\left(-90^\circ\right)&0&\cos\left(-90^\circ\right)&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\left(-45^\circ\right)&-\sin\left(-45^\circ\right)&0\\0&\sin\left(-45^\circ\right)&\cos\left(-45^\circ\right)&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&10\\0&1&0&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\left(-90^\circ\right)&0&\sin\left(-90^\circ\right)&0\\0&1&0&0\\-\sin\left(-90^\circ\right)&0&\cos\left(-90^\circ\right)&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ワールド座標系→カメラ座標系

モデル座標系→ワールド座標系

カメラ座標系→ワールド座標系の逆行列
（右側と同じ形になっているところに注目）

逆行列を使わない方法で
考えられる必要がある



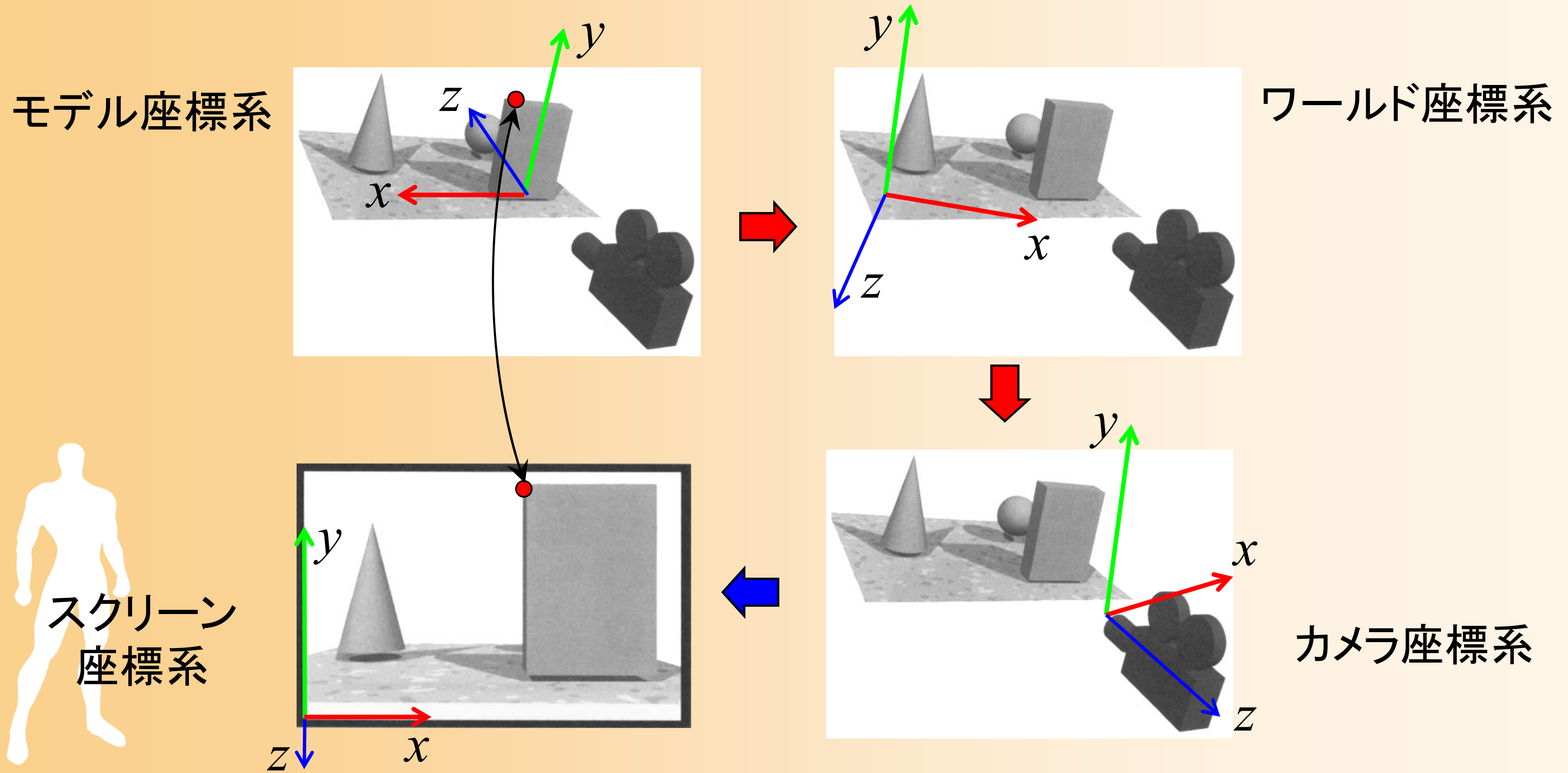
OpenGLプログラミング
変換行列の設定

変換行列の設定

- OpenGLは、内部に変換行列を持っている
  - モデルビュー変換行列
  - 射影変換行列
    - 両者は別に扱った方が便利なので、別々に設定できるようになっている
- OpenGLの関数を呼び出すことで、これらの変換行列を変更できる

座標変換（復習）

- モデル座標系からスクリーン座標系への変換



変換行列による座標変換（復習）

- 視野変換（アフィン変換）＋射影変換（透視変換）
  - 最終的なスクリーン座標は $(x'/w' \quad y/w' \quad z/w')$

$$
\begin{pmatrix}
\frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\
0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\
0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\
0 & 0 & -1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
R_{00}S_x & R_{01} & R_{02} & T_x \\
R_{10} & R_{11}S_y & R_{12} & T_y \\
R_{20} & R_{21} & R_{22}S_z & T_z \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}
$$

モデル座標系での頂点座標

射影変換（カメラ→スクリーン）

視野変換（モデル→カメラ）

スクリーン座標系での頂点座標

座標変換の設定（復習）

- 自分のプログラムから OpenGLやDirectXに、2つの変換行列を設定する
  - ワールド座標からカメラ座標系への視野変換
    - カメラの位置・向きや、物体の位置向きに応じて、適切なアフィン変換行列を設定
    - さまざまな状況で、適切な変換行列を設定できるように、十分に理解しておく必要がある
  - カメラ座標系からスクリーン座標系への射影変換
    - 透視変換行列は、通常、固定なので、最初に一度だけ設定
    - 視野角やスクリーンサイズなどを適切に設定

変換行列の設定のための関数

- 設定を行う変換行列の指定
  - glMatrixMode()
    - どの変換行列を変更するのかを指定する
- 変換行列の設定
  - 主に視野変換の設定に使われる関数
    - glLoadIdentity()、glTranslate()、glRotate()、他
  - 射影変換行列の設定に使われる関数
    - gluPerspective(), glFrustrum(), glOrth()、他

変換行列の指定

- glMatrixMode（ *mode* ）
  - 設定する変換行列を指定する
  - GL_MODELVIE
    - モデルビュー変換（視野変換）
（モデル座標系からカメラ座標系への変換）
  - GL_PROJECTION
    - 射影変換（投影変換）
（カメラ座標系からスクリーン座標系への変換）

変換行列の設定のための関数

- 設定を行う変換行列の指定
  - glMatrixMode()
    - どの変換行列を変更するのかを指定する
- 変換行列の設定
  - 主に視野変換の設定に使われる関数
    - glLoadIdentity()、glTranslate()、glRotate()、他
  - 射影変換行列の設定に使われる関数
    - gluPerspective(), glFrustrum(), glOrth()、他

変換行列の変更

- glLoadIdentity()
  - 単位行列で初期化
- glTranslate(*x, y, z*)
  - 平行移動変換をかける
- glRotate(*angle, x, y, z*)
  - 指定した軸周りの回転変換をかける
  - angle は、1回転を360として指定

変換行列の変更

- 変換行列は順番に右側にかけられていく
  - プログラムで後から記述した変換行列の方が、実際には先に適用される

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & \mathbf{A} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

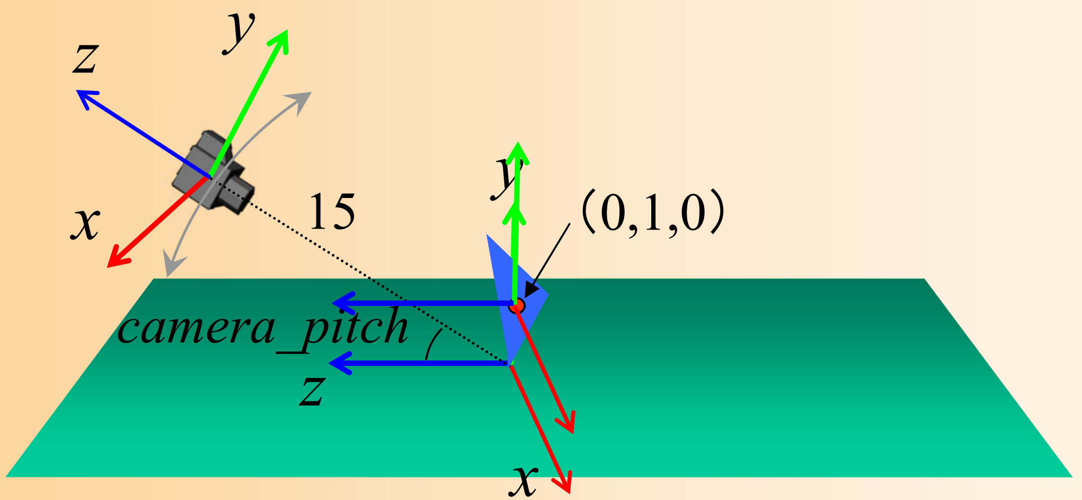
プログラムに記述する順番

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{A}_n$$

適用される順番

サンプルプログラムの視野変換行列

- サンプルプログラムのシーン設定
  - カメラと水平面の角度（仰角）は camera_ptich
  - カメラと中心の間の距離は 15
  - ポリゴンを（0,1,0）の位置に描画



サンプルプログラムの視野変換行列

- モデル座標系 → カメラ座標系 への変換行列

$$
\underbrace{\overset{③}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{②}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-camera\_pitch) & -\sin(-camera\_pitch) & 0 \\ 0 & \sin(-camera\_pitch) & \cos(-camera\_pitch) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{\text{ワールド座標系→カメラ座標系}} \underbrace{\overset{①}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{\text{モデル座標系→ワールド座標系}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}
$$

  - x軸周りの回転
  - 2つの平行移動変換の位置に注意
    - 中心から15離れるということは、回転後の座標系でカメラを後方（z軸）に15下げることと同じ

サンプルプログラムの変換行列の設定

- 描画処理（display()関数）

```
// 変換行列を設定（ワールド座標系→カメラ座標系）
glMatrixMode( GL_MODELVIEW );
glLoadIdentity();
③ glTranslatef( 0.0,  0.0, - 15.0 );
② glRotatef( - camera_pitch, 1.0, 0.0, 0.0 );

// 地面を描画（ワールド座標系で頂点位置を指定）
・・・・・・

// 変換行列を設定（モデル座標系→カメラ座標系）
① glTranslatef( 0.0, 1.0, 0.0 );

// ポリゴンを描画（モデル座標系で頂点位置を指定）
・・・・・・
```

以降、視野変換行列を変更することを指定

単位行列で初期化

平行移動行列・回転行列を順にかけることで、変換行列を設定

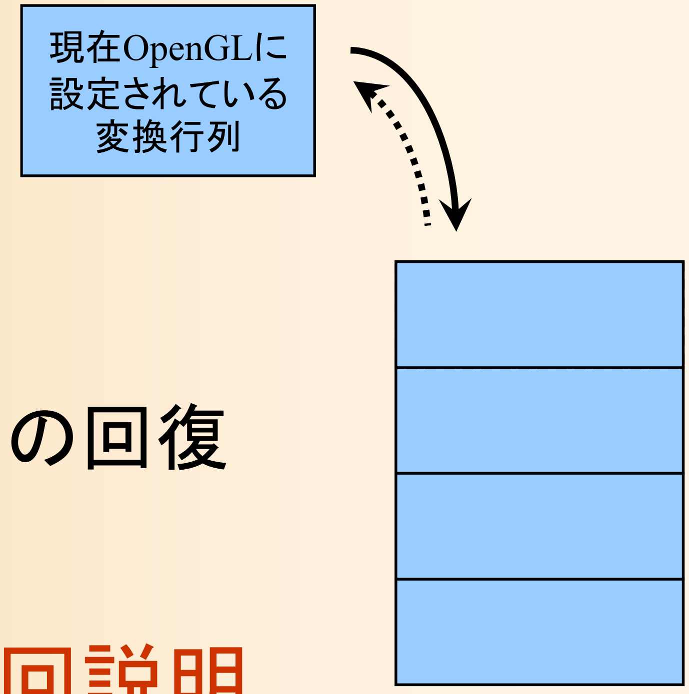
その他の変換行列の設定関数

- glLookAt(カメラ位置, 目標位置, 上方ベクトル)
  - カメラと目標の位置で指定
  - 回転角度で向きを表す場合には向かない
- glLoadMatrix(配列), glMultMatrix(配列)
  - 配列を使って行列を直接設定 or かける
  - GL_double m[4][4];
    - m[i][j] が 行列の j行 i 列の要素を表す

※ やや特殊な設定方法なので、本講義の演習では、これらの関数は使用しない

変換行列の退避･復元（1）

- 現在の変換行列を別領域（スタック）に記録しておき、後から復元することができる
- glPushMatrix()
  – 現在の変換行列の退避
  – スタックに積む



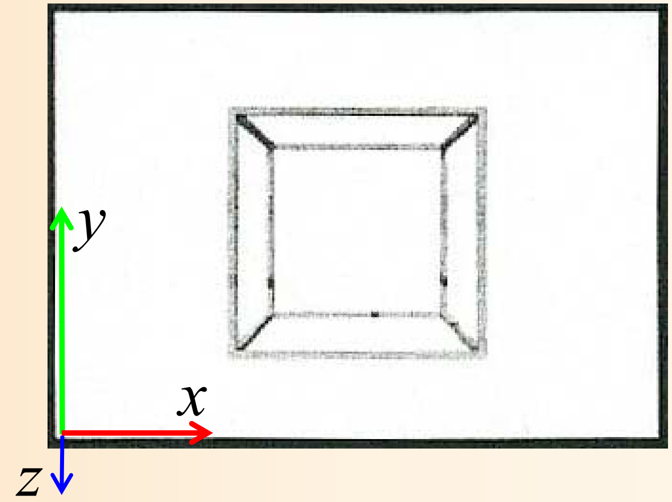
- glPopMatrix()
  – 最後に退避した変換行列の回復
  – スタックから取り出す
- ※ 具体的な使用例は次回説明

変換行列の設定のための関数

- 設定を行う変換行列の指定
  - glMatrixMode()
    - どの変換行列を変更するのかを指定する
- 変換行列の設定
  - 主に視野変換の設定に使われる関数
    - glLoadIdentity()、glTranslate()、glRotate()、他
  - 射影変換行列の設定に使われる関数
    - gluPerspective(), glFrustrum(), glOrth()、他

射影行列の変換

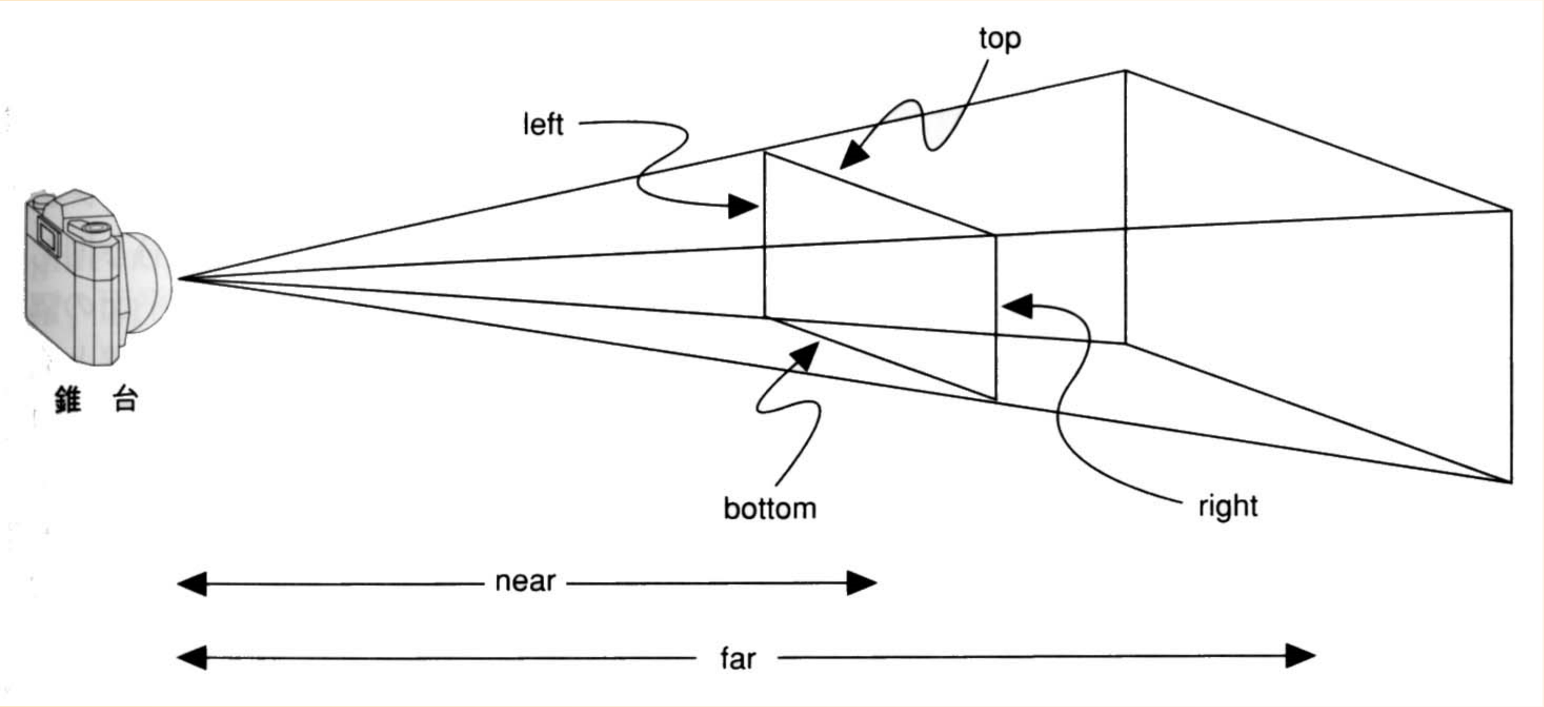
- 射影変換の種類
  - 透視射影
    - 現実の見え方をシミュレート
    - 遠くにあるものほど中央に寄って見える



  - 平行射影
    - 平行に射影
    - 図面などを描画する時に使用

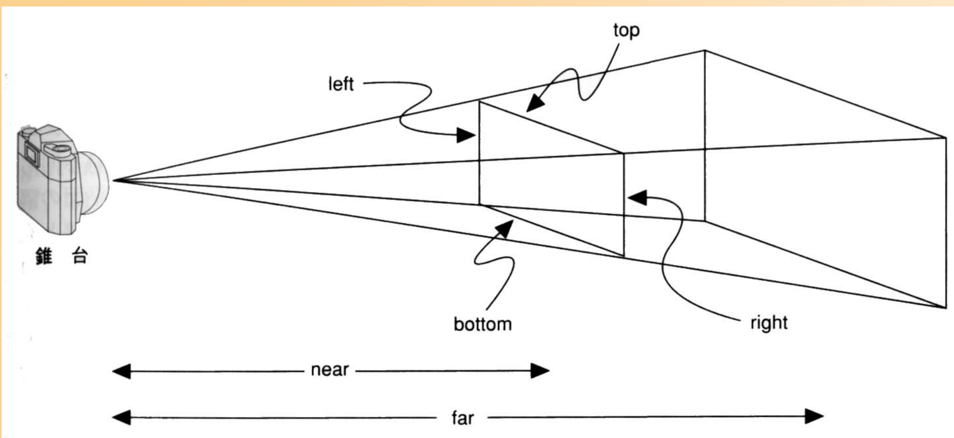
透視射影変換

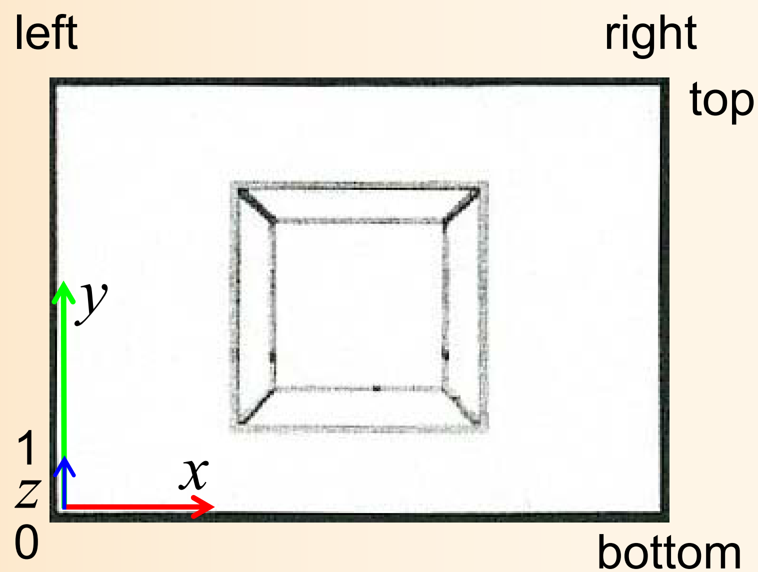
- glFrustum（手前面の大きさ, 手前面の距離, 奥面の距離）



透視変換(復習)

- 透視変換行列



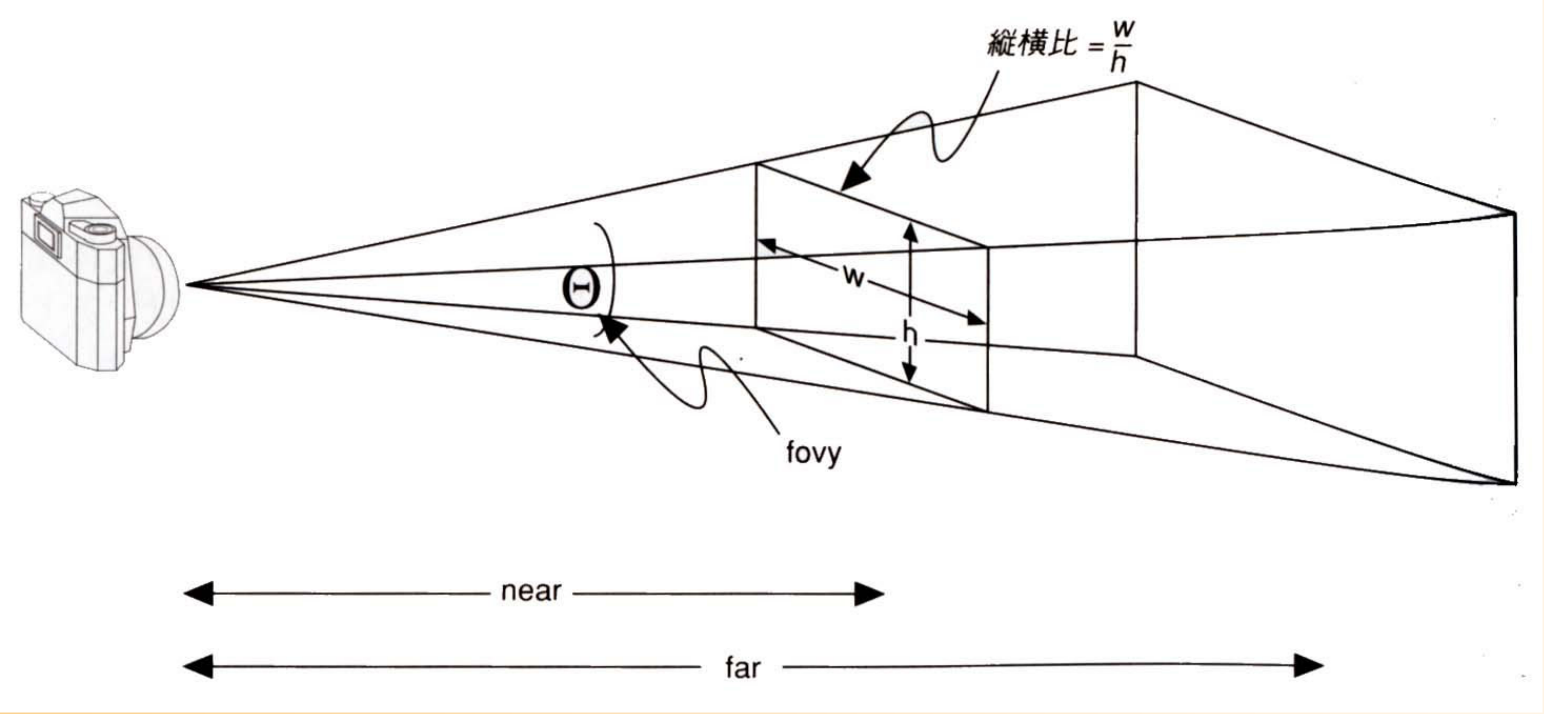


$$\begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'/w' \\ y'/w' \\ z'/w' \end{pmatrix}$$

W'=−Z となり、Zで割ることになる
(Z値が大きくなるほど中央になる)

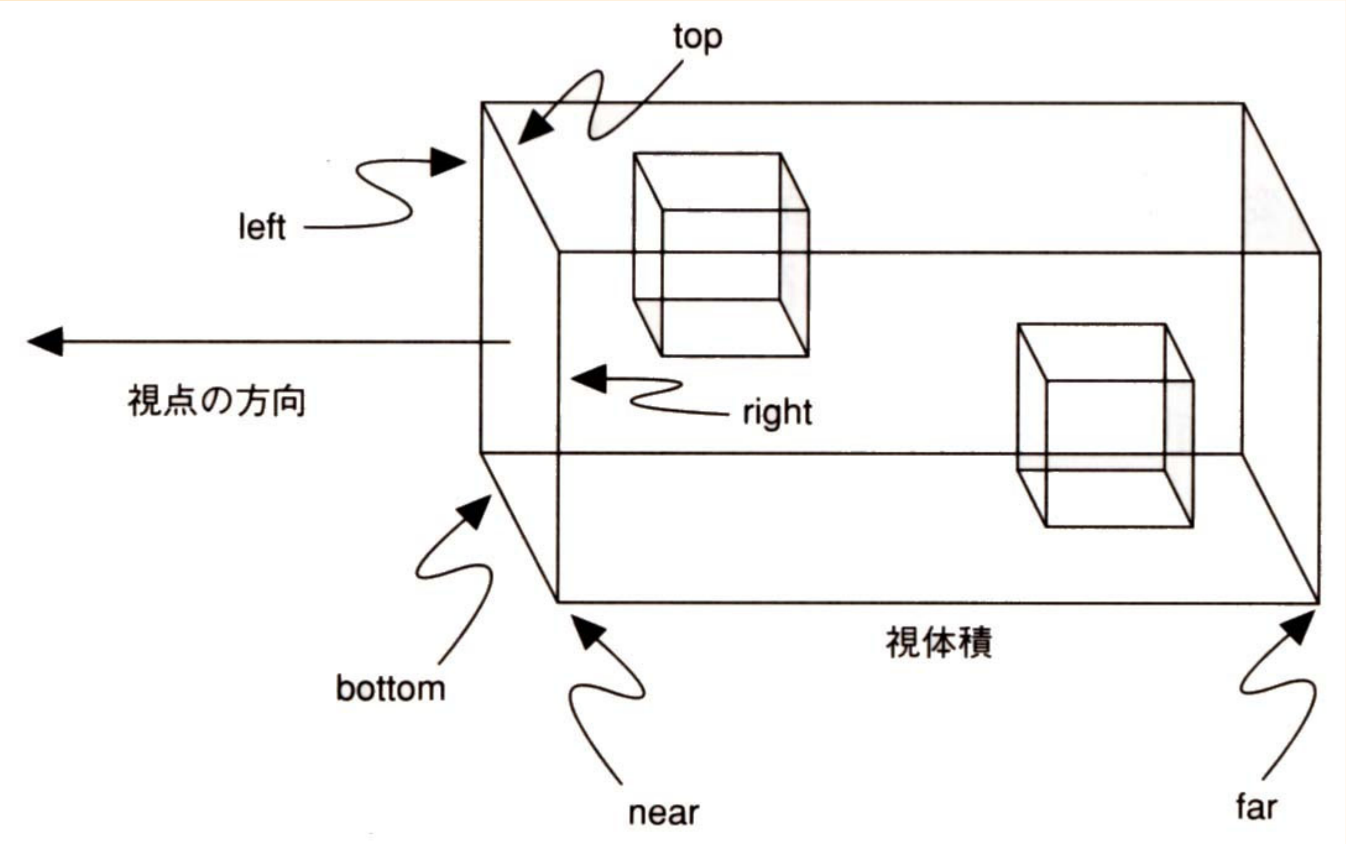
透視射影変換

- gluPerspective（視野角, 縦横比, 手前面距離, 奥面距離）
  - 視界領域が左右対称であるという前提で、より少ない引数で透視射影変換を設定する関数



平行射影変換

- glOrtho（描画範囲, 手前面の距離, 奥面の距離）



射影変換の設定（サンプルプログラム）

- ウィンドウサイズから変更された時に設定
  - 透視変換行列の設定（視野角を45度とする）

```
void  reshape( int w, int h )
{
        // ウィンドウ内の描画を行う範囲を設定（ウィンドウ全体に描画）
        glViewport(0, 0, w, h);

        // カメラ座標系→スクリーン座標系への変換行列を設
        glMatrixMode( GL_PROJECTION );
        glLoadIdentity();
        gluPerspective( 45, (double)w/h, 1, 500 );
}
```

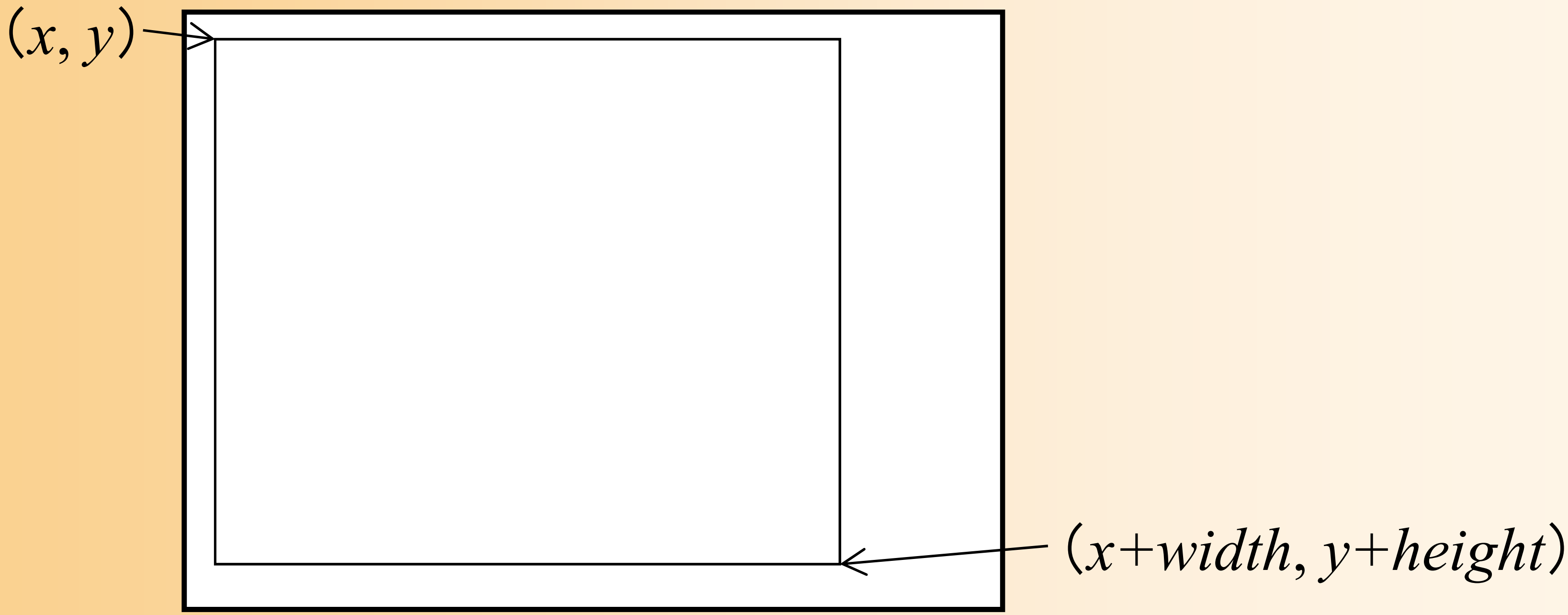
以降、射影変換行列を変更することを指定

単位行列で初期化

透視変換を設定

ビューポートの設定

- glViewport（ *x*, *y*, *widht*, *height* ）
  - ウィンドウ内のどの範囲に描画を行うかを設定



まとめ

- 前回の復習
- 変換行列の復習・応用
  - 前回の演習問題
  - 追加の演習問題
- OpenGLプログラミング
  - 変換行列の設定

次回予告

- OpenGL演習
  - 視点操作の拡張
  - 変換行列を使ったアニメーション

  - 前回までの演習が終っていなかった人がいれば、必ず終らせておくこと